c) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{e} - I_n$.

d) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n\,(n!)\,2^{n+1}}$. Déduire la limite de u.

EXERCICE N°5 : **35'** **5 points**

Soit f la fonction définie sur $[0 , +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(e^x + e^{-x}\right)$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère ON (unité 3cm). **1) a)** Montrer que pour tout $x \in [0 , +\infty[$; $f(x) = x + \ln\left(1 + e^{-2x}\right)$.

b) En déduire que la droite D : y = x est une asymptote à (C). Préciser la position de (C) et D.

c) Dresser le tableau de variation de f. Construire (C) et D.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0 , +\infty[$ sur $[\ln 2 , +\infty[$.

b) Tracer (C') la courbe de f^{-1} sur le même repère que (C).

3) Pour tout $x \in [0 , +\infty[$, on pose $F(x) = \int_0^x \ln\left(1 + e^{-2t}\right) dt$.

a) Soit $\alpha > 0$. Donner une interprétation géométrique de $F(\alpha)$.

b) Etudier le sens de variations de F sur $[0 , +\infty[$.

c) Soit $x > 0$. Montrer que pour tout $t \in [1 , 1+x]$, on a : $\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{t} \leq 1$ puis déduire que

$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.

d) Soit $x > 0$. Montrer alors que $\frac{1}{2}\left[\ln 2 - \ln\left(1 + e^{-2x}\right)\right] \leq F(x) \leq \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2x}\right)$.

4) Pour tout entier n on pose $u_n = \int_n^{n+1} \ln\left(1 + e^{-2t}\right) dt$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq \ln\left(1 + e^{-2n}\right)$. En déduire la limite de u.

b) Montrer que $S_n = F(n+1)$. En déduire que (S_n) est convergente.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn